Geometrie jako transformace

Arthur Zajonc

Pojetí geometrie, které objevil a zformuloval Eukleidés (zhruba kolem roku 300 př. n. 1.), dominovalo matematice až do devatenáctého století. Kant dokonce povýšil euklidovskou geometrii na pravdu, o níž se nediskutuje a která nepotřebuje empirické odůvodnění. Až v průběhu devatenáctého století se matematici jako Bolyai, Lobačevskij, Riemann a Gauss úspěšně postavili euklidovským „sebepotvrzujícím“ axiomům a postulátům. S osvobozením matematické imaginace z rigidního euklidovského pojetí vznikla rychle celá řada nových neeuklidovských geometrií. O žádné jednotlivé geometrii už neplatí, že by byla a priori správná. Mnohé geometrie se domáhají stejného postavení. Pokud se někdo chtěl zabývat poznáním geometrie skutečného fyzikálního prostoru, tak v protikladu ke Kantovu tvrzení musel určit měřítko. Tento pokus poprvé učinil Gauss (ten však neuspěl), ale podobná měření pokračují až do dnešní doby. Například astrofyzikové úspěšně využili pozorování reliktního záření, aby ve velkém měřítku určili geometrii vesmíru, a Einsteinova obecná teorie relativity plně využila neeuklidovských geometrií zakřiveného prostoru.

Výzva k prolomení formy tradiční euklidovské geometrie

V nových neeuklidovských geometriích získávají staré ideje, jako je například trojúhelník, nový význam. Například na povrchu koule se mění i tvar trojúhelníku. Když naneseme tři přímky na kouli, stane se podivná věc. Myslete na zeměkouli: ať se jedna přímka stane rovníkem a dvě zbylé poledníky; dva poledníky se setkají s rovníkem v pravém úhlu.

O stejné struktuře uvažujte v rovině. Pokud se dvě čáry setkají s třetí v pravých úhlech, pak ty dvě jsou souběžné a nikdy se nepro- tnou. Na zeměkouli se setkají na severním a jižním pólu. Prostřednictvím tohoto jednoduchého příkladu si můžeme udělat představu, jak plynulé jsou nové geometrie zakřiveného prostoru. Čelíme výzvě prolomit rigidní formy tradiční euklidovské geometrie a převzít flexibilnější myšlení. Přesto se toto množení geometrií jeví jako rozmařilé a matoucí.

Transformace geometrie

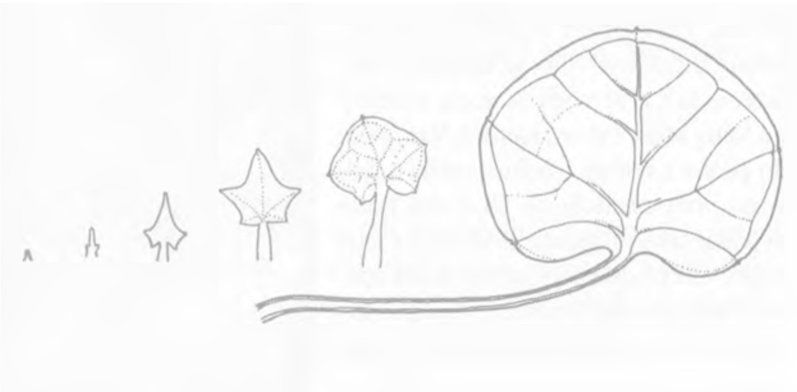
Matematiky devatenáctého století začalo množství geometrií přivádět do rozpaků: jak je utřídit? Jaké hlubší organizační principy vnést do geometrie, aby nedocházelo k tomuto bujení? Německý matematik Felix Klein rozvinul v roce 1872 svůj tzv. Erlangenský program, pojmenovaný po univerzitním městě, v němž učil. Tento program uspořádává geometrie podle jejich transformativních vlastností, nebo konkrétněji na základě jejich vlastností, jež zůstávají konstantní i uprostřed změn. Nám kontemplativním praktikům pomáhá Erlangenský program porozumět tomu, jak můžeme nalézt orientaci ve vesmíru měnících se tvarů. Meditační zkušenosti začínají mít na určité úrovni proměnlivý charakter, důvěrně známé se ztrácí a my potřebujeme odhalit to, co je trvalé uprostřed změn. Transformace v geometrii nabízí jasný příklad.

Cvičení proměny posunu a rotace

Uvažujme nyní o jednodušších proměnách: o posunu a rotaci. Trojúhelník na levé straně je posunut napravo a rotuje. Všimněte si, že i přes posun a rotaci zůstávají vnitřní úhly trojúhelníku a také délka stran beze změny. To jsou ty vlastnosti, jež jsou neměnné i přes posun a rotaci (a nazývají se kolmé proměny).

Vezměte do ruky knihu a začněte s ní pohybovat v prostoru. Všechny pohyby, které můžete s knihou předvádět, jsou pouhou kombinací posunu a rotace. Ve skutečnosti platí totéž pro všechna pevná tělesa jako např. vaše auto, telefon nebo mince ve vaší kapse. Jediné druhy pohybu, které mohou dělat, jsou posun a rotace. Avšak ne všechny objekty v našem světě jsou pevné. Převrhněte sklenici s vodou. Stejné množství vody je nyní na podlaze, avšak tvar vody je zcela odlišný od toho, který byl ve sklenici. Nasýpejte do pánve s vodou trochu prášku a pak vodu prsty zamíchejte. Sled vírů bude vypadat jako na spodním obrázku. List může mít podobnou formu, když roste, avšak zároveň se zvětšuje. Jednoduše řečeno: přísné transformace rotace a posunu nestačí zachytit celou řadu změn, které vidíme a je jich mnohem méně než těch, které se objevují v našich kontemplativních zkušenostech.

Za druhý příklad nám poslouží stejný trojúhelník, ale nyní přidáme změnu velikosti. Tmavý trojúhelník je menší, tudíž jeho strany už nejsou stejně dlouhé jako původně: to jest, jejich délka v rámci proměny podobnosti není vlastností neměnnou. Živý svět je takových proměn plný.



Výzva k osvobození v geometrických cvičeních - lekce nového živého myslení

Toto pojetí proměny a neměnnosti je pro pochopení Erlangenského programu zásadní. Přísné lpění na euklidovském myslení v devatenáctém století skončilo, ale takřka okamžité se objevil nový způsob, jak se orientovat či nacházet řád v zdánlivém chaosu geometrií. Vlastnosti, které zůstaly nezměněné, mohou být využity k roztřídění různých geometrií. Tato myšlenka se však ukázala jako neudržitelná, když se objevil Einstein a svou obecnou a speciální teorií relativity udělal průlom v klasické fyzice. Staré neměnné vlastnosti jako například délka nebo časové míry byly odvrženy, ale okamžitě se vynořily nové a jemnější principy neměnnosti. Existují významné paralely mezi výzvami, kterým čelil Einstein, a tím, čemu čelíme my, když se snažíme dát smysl svým meditačním zkušenostem. Mnohé ze starých myšlenek musíme odložit, avšak v novém živém myšlení, které rozvíjíme prostřednictvím cvičení uvedených v této knize, se vyjevují nové spirituální pravdy. Naštěstí k tomu, abychom uskutečnili změny v myšlení, potřebné k získání kontemplativního poznání, nemusíme být Einsteinem.

Ve výše uvedených cvičeních jsme rozšiřovali oblast pohybu postupně, ale pracovali jsme obvykle s významnými omezeními. Projektivní geometrie nám nabízí velikou flexibilitu možností, s jednoduchým předpokladem, že přímky se transformují opět v přímky. Úhly, délka a určité další vlastnosti trojúhelníku se mohou měnit, ale přímky se nezávisle na čemkoliv mohou stát jedině přímkami. Trojúhelníky nadále zůstávají trojúhelníky, avšak může se měnit jejich tvar či velikost, a to i natolik, že se jejich vrcholy protáhnou do nekonečna. Těmto zobrazením (transformacím) se říká projektivní, protože metoda, dle níž jsou konstruovány, využívá projekce a řezu.Na spodním obrázku je středem projekce bod O. Body X’, Y a Z’ odpovídají bodům X”, Y”, Z”, jež vytvářejí dva trojúhelníky (silnější čáry). Můžeme vidět, že dvojice bodů jsou projekcí vztaženy k třem přímkám, které procházejí bodem O a procházejí rovněž původní dvojicí bodů.

Obrázek představuje také důležitou vlastnost obou trojúhelníků: pokud se odpovídající strany postupně prodlužují do nekonečna, jejich krajní body se setkávají v tzv. nevlastních bodech, které v projektivní rovině tvoří nevlastní přímku *o*. Toto platí vždy pro obecné trojúhelníky v projektivní transformaci. Vidíme, že i přes velkou svobodu, která v projektivních zobrazeních vládne, můžeme stále nacházet řád, přítomný subtilně a někdy i skrytě. To je základní lekce našeho nového myšlení. Bude žít s pohyblivými prvky a podobně subtilním řádem.

Osvobození imaginace v umění

Osvobození, které se původně odehrálo v geometrii, zaujalo místo v jiných odvětvích. Mysleme například na vývoj umění na konci devatenáctého století (na impresionisty jako například Pissaro, Manet nebo Cézanne), kteří ohlašovali skutečnou revoluci, jež se pak odehrála v dílech Kandinského a Picassa. Kandinskij toužil po „spiritualitě v umění"; v umění vyžadoval spiritualitu a setřásl poslední zbytky oficiálního umění, aby tak osvobodil imaginaci a vyjádřil nehmotná vnuknutí a vjemy ducha. Pokud budeme podobně jako on myslet „spirituálně", musíme osvobodit svého ducha z přísných omezení euklidovské mentality a rozvinout mnohem plastičtější a pohyblivější způsob myšlení a chápání. Můžeme se naučit v nitru rotovat, přenášet, růst a měnit své myšlení.

Výzva v těchto geometrických cvičeních (která tuto výzvu představují) spočívá v tom, že vnější konstrukce sledujeme vnitřně. Je zcela nezbytné, abychom proměny přímky a obrazců zakoušeli ve své imaginaci a nesledovali je pouze na papíře. Když tak činíme, nenahrazujeme euklidovské bezpečí čirým chaosem. Subtilní řád stále přetrvává. Neměnné vlastnosti zůstávají a chovají se jako Polárka na noční obloze, která se nepohybuje, zatímco ostatní hvězdy kolem se pohybují. Pomocí Polárky můžeme navigovat, byť by všechny důvěrně známé vlastnosti pevniny zmizely z obzoru a my bychom byli vrženi na neznámé moře. V takovémto případě mohou být určitá matematická cvičení ohromně prospěšná a mohou nám pomoci osvobodit své myšlení, takže zůstane bdělost a přesné myšlení. To je přesně ono nové myšlení, které potřebujeme, abychom pochopili to, co zakoušíme v meditaci: jsme flexibilní a citliví k novému subtilnímu řádu.